

# Capítulo 7

## Matemática Elementar Funções Trigonômicas

6 de novembro de 2023

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metr pole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Natal-RN

- Introdução
- Trigonometria no Triângulo Retângulo
- Atividade Online
- Funções Trigonométricas
- Prop. das Funções Seno e Cosseno
- Atividade Online
- Gráficos das Funções Seno e Cosseno
- Atividade Online
- Outras Funções Trigonométricas
- Atividade Online
- Seno e Cosseno da Soma
- Atividade Online
- Lei dos Cossenos e Lei dos Senos
- Atividade Online
- Exercícios
- Bibliografia

- Matemática Elementar
- Igor Oliveira

- Introdução
- Trigonometria no Triângulo Retângulo
- Atividade Online
- Funções Trigonométricas
- Prop. das Funções Seno e Cosseno
- Atividade Online
- Gráficos das Funções Seno e Cosseno
- Atividade Online
- Outras Funções Trigonométricas
- Atividade Online
- Seno e Cosseno da Soma
- Atividade Online
- Lei dos Cossenos e Lei dos Senos
- Atividade Online
- Exercícios

# Apresentação da Aula

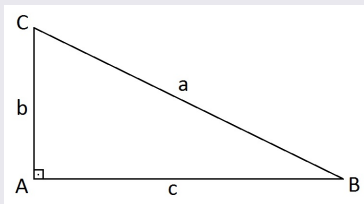
A trigonometria é estudada desde os gregos e sua motivação inicial era determinar os seis elementos principais do triângulo (seus lados e ângulos) quando conhecidos alguns deles.

Com a criação do Cálculo Infinitesimal veio a necessidade da criação de funções trigonométricas definidas em  $\mathbb{R}$ , conforme estudaremos nesse capítulo.

Tais funções ganharam notoriedade quando, em 1822, Joseph Fourier provou que toda função periódica é uma soma (finita ou infinita) de funções do tipo  $a \cos(nx) + b \sin(nx)$ . Tal descoberta deu origem a toda uma área da matemática, a Análise de Fourier. Além disso, segundo o banco de dados da revista "Mathematical Reviews", o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o de Fourier.

## Definição 1

Em um triângulo retângulo  $ABC$  como na figura abaixo, define-se o cosseno ( $\cos$ ) e o seno ( $\sin$ ) dos ângulos agudos do triângulo:



$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}, \quad \sin \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \sin \hat{C} = \frac{c}{a}.$$

As relações definidas dessa maneira são únicas para cada ângulo em decorrência da proporcionalidade dos lados de triângulos semelhantes. Portanto, calcula-se o seno e o cosseno de um ângulo independentemente do triângulo retângulo que o contém.

## Proposição 2

- ▶ O cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complementar e vice-versa. Daí a palavra "cosseno" (seno do complemento);
- ▶ O seno e o cosseno são números compreendidos entre 0 e 1 por serem razões entre um cateto pela hipotenusa de um triângulo retângulo.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

5 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções Trigonométricas

Prop. das Funções Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

Atividade Online

# Senos e Cossenos de Ângulos Notáveis

## Definição 3

Os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  são chamados de ângulos notáveis.

## Exemplo 4

Os valores do seno e cosseno dos ângulos notáveis são dados na tabela abaixo:

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

## Proposição 5 (Relação Fundamental da Trigonometria)

Seja  $\widehat{B}$  um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede  $a$  e os catetos,  $b$  e  $c$ . Então:

$$\text{sen}^2 \widehat{B} + \text{cos}^2 \widehat{B} = 1.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

7 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções Trigonométricas

Prop. das Funções Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

Atividade Online

Atividade 66 - Razões Trigonométricas em Triângulos Retângulos

Atividade 67 - Como Calcular a Medida de um Lado em Triângulos Retângulos

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no Triângulo Retângulo

8 Atividade Online

Funções Trigonométricas

Prop. das Funções Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da Soma

Atividade Online

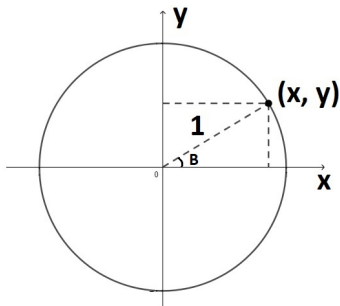
Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

Atividade Online



# O Círculo Trigonométrico

A relação fundamental  $\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1$  sugere que os pontos do plano cartesiano  $(\cos \hat{B}, \sin \hat{B})$  pertencem a uma circunferência de raio 1, como mostra a figura abaixo.



Dessa forma, sendo  $\hat{B}$  o ângulo medido a partir do eixo positivo de  $x$  e tomando o sentido anti-horário como sentido positivo, os pontos  $(x, y)$  do círculo acima são tais que  $x = \cos \hat{B}$  e  $y = \sin \hat{B}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

9

Funções  
Trigonômicas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonômicas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

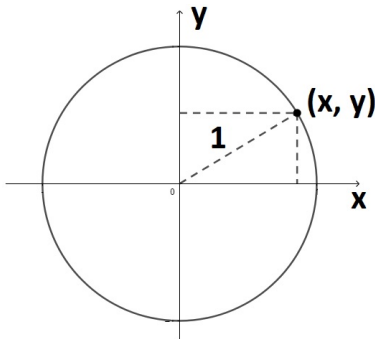
Atividade Online

44

Exercícios

# O Círculo Trigonométrico

Agora, a fim de definirmos as funções trigonométricas como funções reais, considere a seguinte função, chamada de função de Euler:  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $E(t)$  é o ponto  $(x, y)$  do círculo trigonométrico obtido após “enrolarmos”, com corda de comprimento  $t$ , o círculo trigonométrico iniciando no ponto  $(1, 0)$  e tomando como sentido positivo o sentido anti-horário.



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

10 Funções  
Trigonômétricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonômétricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

## Definição 6

As funções  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$E(t) = (\cos t, \sin t).$$

Em outras palavras,  $x = \cos t$  e  $y = \sin t$  são, respectivamente, a abcissa e a ordenada do ponto  $E(t)$  da circunferência unitária.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

11 Funções  
Trigonômicas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonômicas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

Considere as seguintes definições acerca de funções reais.

## Definição 7

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se periódica quando existe  $T \in \mathbb{R}^*$  tal que  $f(t + T) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Ao menor número  $T > 0$  que faz a propriedade anterior ser satisfeita, damos o nome de período da função  $f$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

12 Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

Considere as seguintes definições acerca de funções reais.

## Definição 7

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se periódica quando existe  $T \in \mathbb{R}^*$  tal que  $f(t + T) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Ao menor número  $T > 0$  que faz a propriedade anterior ser satisfeita, damos o nome de período da função  $f$ .

Como uma volta completa no círculo trigonométrico tem  $2\pi$  de comprimento, é fácil ver que a função seno e cosseno são periódicas de período  $2\pi$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

12 Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

## Definição 8

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é par quando se tem  $f(-t) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se for o caso de  $f(-t) = -f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é ímpar.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

13 Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

## Definição 8

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é par quando se tem  $f(-t) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se for o caso de  $f(-t) = -f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é ímpar.

## Proposição 9

A função seno é ímpar e a função cosseno é par.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

13 Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

## Exemplo 10

Calcule os senos e cossenos dos arcos  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$  e  $\frac{11\pi}{6}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

14 Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios



## Exemplo 10

Calcule os senos e cossenos dos arcos  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$  e  $\frac{11\pi}{6}$ .

Segue imediatamente da definição das funções trigonométricas que a relação fundamental

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

vale para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Além disso, valem as seguintes igualdades para todo  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \cos(t + \pi) &= -\cos t, & \sin(t + \pi) &= -\sin t, \\ \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin t, & \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos t, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos t, \\ \cos(\pi - t) &= -\cos t, & \sin(\pi - t) &= \sin t. \end{aligned}$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

14 Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

Atividade 68 - Valores Trigonométricos de Ângulos Notáveis

Atividade 69 - Use a Identidade Trigonométrica Fundamental

Atividade 70 - Resolva Equações Senoidais (Básicas)

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções Trigonométricas

Prop. das Funções Seno e Cosseno

15 Atividade Online

Gráficos das Funções Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

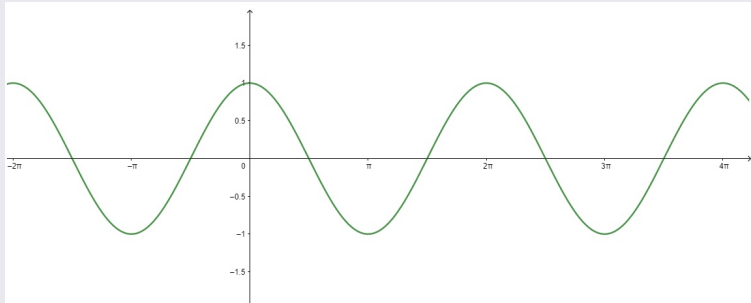
Atividade Online

44 Exercícios

# Gráfico da Função Cosseno

## Exemplo 11

O gráfico da função  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por:



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

16 Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

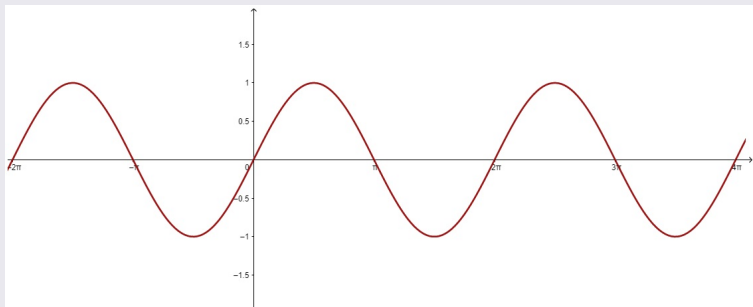
Atividade Online

44 Exercícios

# Gráfico da Função Seno

## Exemplo 12

O gráfico da função  $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por:



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

17 Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

## Atividade 71 - Gráfico de Funções Senoidais

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

18 Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

## Definição 13

Definem-se, através das funções seno e cosseno, as funções trigonométricas com as seguintes leis de formação:

- ▶  $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ , tangente;
- ▶  $\cot x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$ , cotangente;
- ▶  $\sec x = \frac{1}{\text{cos } x}$ , secante;
- ▶  $\csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$ , cossecante.

Os domínios dessas funções não contêm o conjunto dos valores de  $x$  que zeram seus respectivos denominadores.

Por exemplo, o maior subconjunto dos reais no qual podemos definir as funções tangente e secante é

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

19 Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

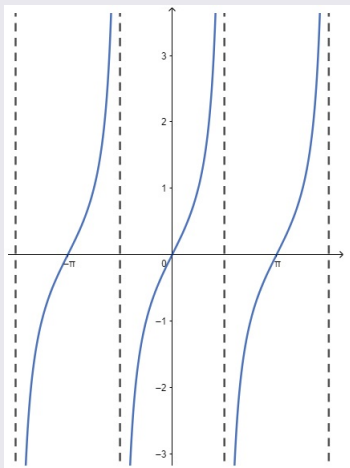
Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

# Gráfico da Função Tangente

## Exemplo 14

O gráfico da função  $\tan : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  é:



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

20 Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

## Proposição 15

Valem as seguintes propriedades acerca da função tangente:

- ▶ Embora não seja definida para todo número real, a função tangente pode ser considerada uma função periódica de período  $\pi$  em todo o seu domínio, pois  $\tan(x + \pi) = \tan x$ ;
- ▶ Para todo par de pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  em uma reta não vertical, com  $x_1 \neq x_2$ , se  $\alpha$  é o ângulo formado pela reta e o eixo  $x$ , então

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

- ▶ Ao definirmos  $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ , obtemos uma bijeção. Assim, o intervalo aberto  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  tem a mesma cardinalidade que  $\mathbb{R}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonômicas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

21 Outras Funções  
Trigonômicas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

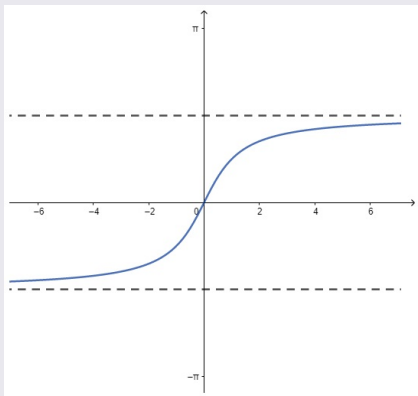
Atividade Online



# A Função Inversa da Tangente

## Exemplo 16

Como  $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  é bijetiva, então essa função possui inversa, que chamamos de arco tangente e denotamos por  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Seu gráfico é



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

22 Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

Atividade 72 - Razões Trigonométricas Recíprocas  
Atividade 73 - Problemas de Trigonometria com  
Triângulos Retângulos

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

23 Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

## Proposição 17

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

24 Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

# Fórmulas de Adição de Arcos

## Proposição 17

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha.$$

Da paridade das funções seno e cosseno seguem que:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha.$$

Além disso, temos os casos particulares

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha.$$

As fórmulas acima valem para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

24 Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

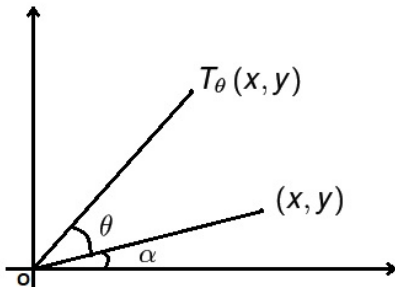
44 Exercícios

# Rotação de Pontos no Plano Cartesiano

Considere o ponto  $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e chame de  $\alpha$  o ângulo formado pelo segmento  $OA$  com o eixo positivo de  $x$ . A função  $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$T_\theta(x, y) = (x \cdot \cos \theta - y \cdot \operatorname{sen} \theta, x \cdot \operatorname{sen} \theta + y \cdot \cos \theta)$$

é a rotação de ângulo  $\theta$  do ponto  $A = (x, y)$  em torno da origem.



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonômicas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonômicas

Atividade Online

25 Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

Atividade 74 - Uso das Identidades Trigonométricas de Soma de Ângulos

Atividade 75 - Calcule Valores Trigonométricos a Partir de Identidades de Soma de Ângulos

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções Trigonométricas

Prop. das Funções Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da Soma

26 Atividade Online

Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios

## Teorema 18 (Lei dos Cossenos)

Seja  $ABC$  um triângulo com  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ . Então

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}.$$

A Lei dos Cossenos é uma generalização do Teorema de Pitágoras. Note que, se  $\widehat{B}$  é um ângulo reto, então  $\cos \widehat{B} = 0$  e  $b$  será a hipotenusa do triângulo.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

27

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44

Exercícios

## Teorema 19 (Lei dos Senos)

Seja  $ABC$  um triângulo com  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ . Então

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}}$$

A Lei dos Senos nos diz que, em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

28 Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44 Exercícios



## Teorema 19 (Lei dos Senos)

Seja  $ABC$  um triângulo com  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ . Então

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}}$$

A Lei dos Senos nos diz que, em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante.

As leis dos cossenos e dos senos permitem obter os seis elementos de um triângulo quando são dados três deles, desde que um seja lado, conforme os casos clássicos de congruência de triângulos.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

28

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

44

Exercícios

## Atividade 76 - Problemas com Triângulos Gerais

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

# Exercícios

1. Na Definição 1 definimos seno e cosseno de um ângulo no triângulo retângulo. Como você definiria, com os lados de um triângulo retângulo, as demais relações trigonométricas da Definição 13?

2. Saber para quais valores  $t$  são válidas algumas equações envolvendo equações trigonométricas é muito importante. Determine o conjunto solução de cada uma das equações abaixo:

- (a)  $\sin t = 0$ ,  $\cos t = 0$  e  $\tan t = 0$ ;
- (b)  $\sin t = 1$ ,  $\cos t = 1$ ;
- (c)  $\sin t = -1$ ,  $\cos t = -1$  e  $\tan t = -1$ ;
- (d)  $\sin t = \cos t$  e  $\tan t = 1$ ;
- (e)  $\csc t = 0$ ,  $\sec t = 0$  e  $\cot t = 0$ ;
- (f)  $\csc t = 1$ ,  $\sec t = 1$ ;
- (g)  $\csc t = -1$ ,  $\sec t = -1$  e  $\cot t = -1$ ;
- (h)  $\csc t = \sec t$  e  $\cot t = 1$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

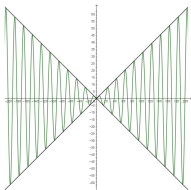
Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

# Exercícios

3. A figura abaixo representa o gráfico da função  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x \cdot \text{sen } x$ , traçado no intervalo  $[-20\pi, 20\pi]$ , juntamente com as retas  $y = x$  e  $y = -x$ .



- Explique por que o gráfico de  $f_1$  fica limitado entre essas retas e indique todos os pontos em que o gráfico toca as retas;
- Considere a seguinte afirmação: *Os máximos e mínimos locais da função  $f_1$  ocorrem nos mesmos valores de  $x$  que os da função seno.* Esta afirmação é verdadeira?
- Como você espera visualizar o gráfico da função  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f_2(x) = x^2 \cdot \text{sen } x$ ?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

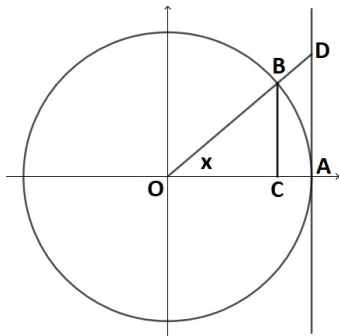
Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

# Exercícios

4. Na figura abaixo, os segmentos  $AD$  e  $OD$  representam, respectivamente,  $\tan x$  e  $\sec x$ .



- Justifique a afirmação acima;
- Qual a interpretação dos sinais de  $\tan x$  e  $\sec x$  na figura?
- Faça uma figura análoga para representar  $\cot x$  e  $\csc x$ , justificando a construção.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

5. Encontre as três menores soluções positivas da equação

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

6. Sem utilizar as fórmulas de seno e cosseno da soma de dois arcos, mostre que, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , vale

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

7. Um triângulo tem um de seus lados medindo  $\sqrt{3} - 1$  e seu ângulo oposto medindo  $\frac{\pi}{6}$ . Dado que outro ângulo do triângulo mede  $\frac{\pi}{4}$ , qual a medida do maior de seus lados?

8. Considere um triângulo retângulo tal que seu perímetro é igual a  $\frac{\sqrt{6} + 2}{2}$  e sua hipotenusa mede 1. Calcule a medida do menor de seus ângulos.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

9. Um triângulo  $ABC$  possui lados que medem  $a = 10$ ,  $b = 12$  e  $c = 8$ , onde o lado  $a$  é oposto ao ângulo  $\hat{A}$ ,  $b$  ao  $\hat{B}$  e  $c$  ao  $\hat{C}$ . Mostre que  $\hat{B} = 2\hat{C}$ .
10. Mostre que o perímetro do pentágono regular inscrito em um círculo unitário é dado por  $10 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$ .
11. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \operatorname{sen}(ax) + \operatorname{sen}(bx)$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes reais.
- (a) Mostre que, se  $a$  e  $b$  são racionais, então  $f$  é periódica;  
*Dica:* Mostre que o período de  $\operatorname{sen}(ax)$  é  $\frac{2\pi}{a}$ .
- (b) A recíproca da afirmação do item anterior é verdadeira? Justifique sua resposta.
12. Considere a função trigonométrica  $f(x) = \operatorname{sen} x$ .
- a) Com ajuda do círculo trigonométrico, escreva um intervalo onde  $f$  é crescente e possua os valores onde  $f$  atinge seu máximo e mínimo absolutos.
- b) Generalize o intervalo de crescimento do item anterior para cada  $k \in \mathbb{Z}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

# Exercícios

13. Prove as identidades abaixo, válidas para todo  $x$  onde as expressões estão definidas:

$$(a) \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x;$$

$$(b) \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x};$$

$$(c) \frac{1}{\operatorname{csc} x - \operatorname{cot} x} = 1 + \cos x;$$

$$(d) \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2};$$

$$(e) \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2};$$

$$(f) \operatorname{sen}(mx) \cdot \cos(nx) = \frac{\operatorname{sen}[(m - n)x] + \operatorname{sen}[(m + n)x]}{2};$$

$$(g) \operatorname{sen}(mx) \cdot \operatorname{sen}(nx) = \frac{\cos[(m - n)x] - \cos[(m + n)x]}{2};$$

$$(h) \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos(2x);$$

$$(i) \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online



14. Considere  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $3,5 < x < 6$ . Calcule o conjunto solução da inequação  $-2 \cos^2 x + \sin x + 1 \geq 0$ .

15. Considere  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $2 < x < 4$ . Calcule o conjunto solução da equação  $\sec^2 x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \tan x = 2$ .

16. Use as fórmulas de seno e cosseno da soma para determinar os senos e cossenos dos seguintes ângulos (medidos em radianos):  $\frac{\pi}{8}$ ,  $\frac{\pi}{12}$ ,  $\frac{3\pi}{8}$  e  $\frac{5\pi}{12}$ .

17. Considere as funções seno e cosseno definidas em  $\mathbb{R}$ .

- Prove, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , a identidade  $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$  sem utilizar o círculo trigonométrico.
- Considere que o gráfico da função seno é conhecido. Como você poderia obter o gráfico da função cosseno mediante a identidade anterior?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

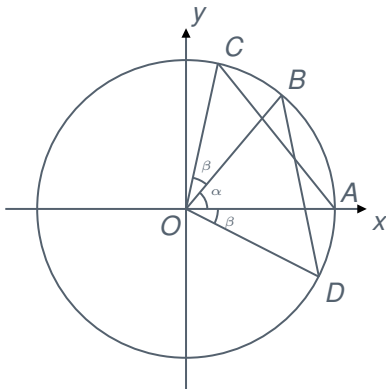
Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

# Exercícios

18. Considere dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  e  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ . Na figura abaixo temos um círculo trigonométrico, onde são marcados os pontos  $A, B, C$  e  $D$  de tal sorte que  $\alpha = \widehat{AOB}$  e  $\beta = \widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ .



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonômicas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonômicas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

- Utilizando os conceitos de trigonometria, escreva as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ;
- Determine  $\overline{AC}$  (medida do comprimento do segmento  $AC$ ) em função das coordenadas de  $A$  e  $C$ ;
- Determine  $\overline{BD}$  em função das coordenadas de  $B$  e  $D$ ;
- Sabendo que  $\overline{AC} = \overline{BD}$ , use os itens anteriores para mostrar a fórmula para  $\cos(\alpha + \beta)$ .

**19.** Considere dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que  $0 < \alpha < 2\pi$ ,  $0 < \beta < 2\pi$  e  $\alpha > \beta$ . Nas figuras dos próximos slides temos um círculo trigonométrico, onde são marcados os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de tal sorte que  $\alpha = \widehat{AOC}$  e  $\beta = \widehat{AOB}$  em dois casos distintos. Quando  $\alpha - \beta < \pi$  (Caso 1) e  $\pi < \alpha - \beta < 2\pi$  (Caso 2).

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

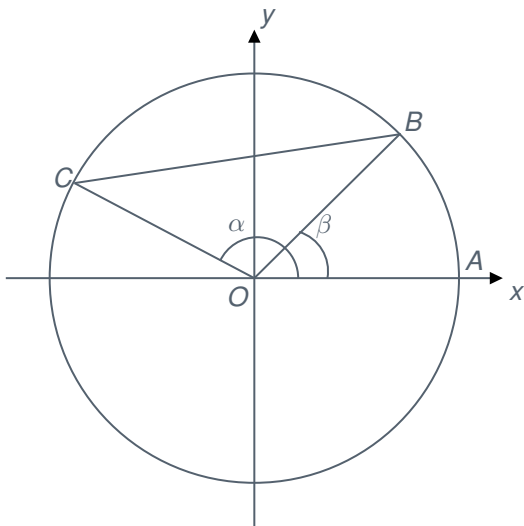


Figura: Caso 1.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

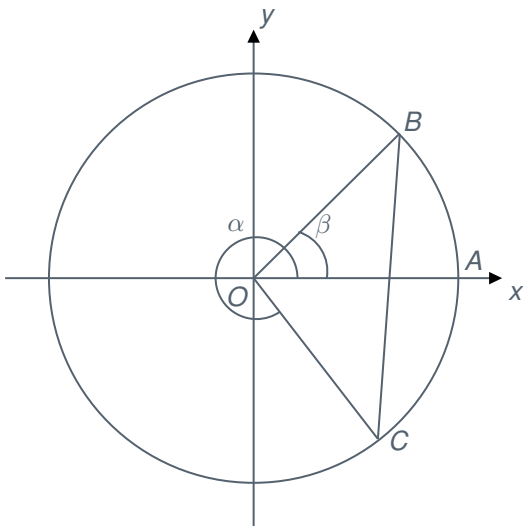


Figura: Caso 2.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

*Observação:* para as resoluções abaixo, não podem ser utilizadas as fórmulas das funções trigonométricas de adição e subtração de arcos.

- Utilizando os conceitos de trigonometria, escreva as coordenadas dos pontos  $B$  e  $C$  de modo que sirvam para ambos os casos;
- Utilize o triângulo  $OBC$  do Caso 1 para demonstrar a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos, ou seja, para  $\cos(\alpha - \beta)$ ;
- Utilize o triângulo  $OBC$  do Caso 2 para demonstrar a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos, ou seja, para  $\cos(\alpha - \beta)$ .

**20.** Obtenha fórmulas para:

- $\tan(\alpha + \beta)$  em função de  $\tan \alpha$  e  $\tan \beta$ ;
- $\tan(\alpha - \beta)$  em função de  $\tan \alpha$  e  $\tan \beta$ ;
- $\tan(2\alpha)$  em função de  $\tan \alpha$ ;
- $\sec(\alpha + \beta)$  em função de  $\sec \alpha$ ,  $\sec \beta$ ,  $\tan \alpha$  e  $\tan \beta$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online

**21.** Pedro afirma que, em competições de tiro, acertar um alvo na diagonal é mais difícil do que acertar um alvo que está à frente por conta que o ângulo de visão do alvo na diagonal é menor. A figura no próximo slide (fora de escala) simula uma situação em uma competição de tiros, onde Pedro está no ponto P a 25m de distância do alvo à frente, cada alvo tem 0,5m de diâmetro e distam 4,75m um do outro.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

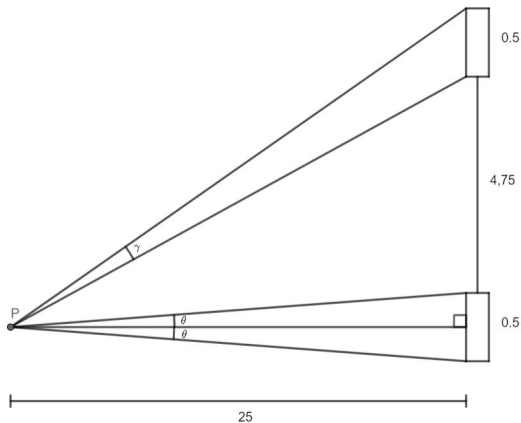
Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online



Com a notação da figura, mostre que o ângulo de visão do alvo na diagonal é menor que o ângulo de visão do alvo à frente, ou seja,  $\gamma < 2\theta$ . Para tanto, use o conceito de tangente no triângulo retângulo e o fato de tangente ser uma função crescente.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online



- [1] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo.  
*Trigonometria - Números Complexos.*  
3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Trigonometria no  
Triângulo Retângulo

Atividade Online

Funções  
Trigonométricas

Prop. das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Gráficos das Funções  
Seno e Cosseno

Atividade Online

Outras Funções  
Trigonométricas

Atividade Online

Seno e Cosseno da  
Soma

Atividade Online

Lei dos Cossenos e  
Lei dos Senos

Atividade Online