

# Capítulo 5

## Matemática Elementar Funções Polinomiais

6 de novembro de 2023

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metr pole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Natal-RN

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

É algo comum escutar a seguinte frase: "Em matemática eu resolvo tudo com regra de três".

Será mesmo que isso é possível? Por exemplo, o lado do quadrado e sua área são proporcionais?

## Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação  $f(x) = ax$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

4 Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação  $f(x) = ax$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

A função linear é usada para modelar problemas de proporcionalidade direta. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrevê-las sob a lei de formação de uma função linear.

Note que, sabendo que uma função é linear, o valor de  $a$  é igual a  $f(1)$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

4 Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação  $f(x) = ax$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

A função linear é usada para modelar problemas de proporcionalidade direta. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrevê-las sob a lei de formação de uma função linear.

Note que, sabendo que uma função é linear, o valor de  $a$  é igual a  $f(1)$ .

No caso das grandezas inversamente proporcionais, a função matemática que modela tal problema é uma função  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  tal que  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Nesse caso, também temos a particularidade de  $f(1) = a \in \mathbb{R}^*$ .

## Teorema 2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)

*Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  *$f$  é linear;*
- (ii)  *$f(x + y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ ;*
- (iii)  *$f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

Nas hipóteses do Teorema, tem-se  $a = f(1) > 0$ . No caso de se supor  $f$  decrescente, vale um resultado análogo, com  $a < 0$ .

A importância desse Teorema está no seguinte fato: se queremos saber se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função linear, basta verificar duas coisas:

- 1ª:  $f$  deve ser crescente ou decrescente. (Estamos deixando de lado o caso trivial de  $f$  ser identicamente nula);
- 2ª:  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e todo  $n \in \mathbb{Z}$ . No caso de  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , basta verificar essa última condição para  $n \in \mathbb{N}$ .



## Exemplo 3

O lado de um quadrado é proporcional à sua área? Em outras palavras, essas duas grandezas podem ser relacionadas por meio de uma função linear?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

7 Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 4

Uma função real chama-se afim quando existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Em uma função afim na qual  $f(x) = ax + b$ , chamamos o valor  $a$  de taxa de variação da função ou de taxa de crescimento. Vale observar que é muito comum chamá-lo de coeficiente angular. Esse termo não é apropriado pois define-se coeficiente angular para retas, e não para funções, mesmo que vejamos que o gráfico de uma função afim seja uma reta.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

8 Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 5

A função identidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é afim, assim como suas translações  $g(x) = x + b$ . São, ainda, casos particulares de funções afins as funções lineares  $f(x) = ax$  e as funções constantes  $f(x) = b$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

9 Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 5

A função identidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é afim, assim como suas translações  $g(x) = x + b$ . São, ainda, casos particulares de funções afins as funções lineares  $f(x) = ax$  e as funções constantes  $f(x) = b$ .

## Exemplo 6

O preço a se pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim  $f : x \mapsto ax + b$ , em que  $x$  é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial  $b$  é a chamada *bandeirada* e o coeficiente  $a$  é o preço de cada quilômetro rodado.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

9 Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 7

A escala  $N$  de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

$^{\circ}N$	$^{\circ}C$
0	18
100	43

Modele o problema com funções afim que transformem a temperatura em  $^{\circ}N$  em  $^{\circ}C$  e vice-versa. Qual a relação entre essas duas funções? Em que temperatura ferve a água na escala  $N$ ?

## Proposição 8

O gráfico de uma função afim  $f(x) = ax + b$  é uma reta.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

11 Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Proposição 8

O gráfico de uma função afim  $f(x) = ax + b$  é uma reta.

Note que, para desenhar o gráfico de uma função afim, basta conhecer dois pontos, pois uma reta é inteiramente determinada por dois pontos.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

11 Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

OBSERVAÇÃO: No Khan Academy é definido função linear como função afim. Ou seja, para eles é qualquer função que o gráfico é uma reta (ou pontos colineares).

Atividade 47 - Problemas de Modelos de Funções Lineares

Atividade 48 - Problemas de Como Escrever Equações Lineares

Atividade 49 - Funções Lineares e Não Lineares

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

12 Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



## Definição 9

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se quadrática quando existem números reais  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Proposição 10

Seja  $f$  uma função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , onde  $a > 0$ .

Então  $f$  não é limitada superiormente e o ponto  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$  é o mínimo absoluto da função.

Caso tenhamos  $a < 0$ , então  $f$  não é limitada inferiormente e o ponto  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$  é o máximo absoluto da função.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

14 Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Proposição 10

Seja  $f$  uma função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , onde  $a > 0$ .

Então  $f$  não é limitada superiormente e o ponto  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$  é o mínimo absoluto da função.

Caso tenhamos  $a < 0$ , então  $f$  não é limitada inferiormente e o ponto  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$  é o máximo absoluto da função.

## Proposição 11

Seja  $f$  uma função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Se  $f(x_1) = f(x_2)$  para  $x_1 \neq x_2$ , então  $x_1$  e  $x_2$  são equidistantes de  $-\frac{b}{2a}$ , ou seja,  $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

14 Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# O Gráfico da Função Quadrática

## Exemplo 12

O gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$  é uma parábola cujo foco é  $F = (0, \frac{1}{4a})$  e cuja diretriz é a reta horizontal  $y = -\frac{1}{4a}$ . Ademais, o vértice da parábola é a origem do plano cartesiano.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

15 Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# O Gráfico da Função Quadrática

## Exemplo 12

O gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$  é uma parábola cujo foco é  $F = (0, \frac{1}{4a})$  e cuja diretriz é a reta horizontal  $y = -\frac{1}{4a}$ . Ademais, o vértice da parábola é a origem do plano cartesiano.

## Proposição 13

O gráfico de uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma parábola, tem a reta  $x = -\frac{b}{2a}$  como eixo de simetria e o ponto  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  é o vértice da parábola.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

15 Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 50 - Problemas com Expressões do Segundo Grau  
(Forma Padrão)

Atividade 51 - Faça o Gráfico de Parábolas em Todas as  
Formas

Atividade 52 - Deslocamento de Parábolas

Atividade 53 - Dimensionar e Refletir Parábolas

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

16 Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 14

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0,$$

onde  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  é uma lista ordenada de números reais e  $X$  é um símbolo, chamado de indeterminada, sendo  $X^i$  uma abreviatura para  $X \cdot X \dots X$  ( $i$  fatores). Ao maior número  $n$  tal que  $a_n \neq 0$  damos o nome de grau do polinômio  $p(X)$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

17 Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 14

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0,$$

onde  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  é uma lista ordenada de números reais e  $X$  é um símbolo, chamado de indeterminada, sendo  $X^i$  uma abreviatura para  $X \cdot X \dots X$  ( $i$  fatores). Ao maior número  $n$  tal que  $a_n \neq 0$  damos o nome de grau do polinômio  $p(X)$ .

Dizemos que dois polinômios  $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$  e  $q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0$  são iguais quando  $n = m$  e  $a_i = b_i$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

17 Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



## Atividade 54 - Identidades Polinomiais

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

18 Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 15

Diz-se que  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função polinomial quando existem números reais  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (1)$$

Os elementos de  $p^{-1}(0)$  são chamados de raízes de  $p$ .

## Exemplo 16

Além das funções lineares, afins e quadráticas, a soma e o produto de funções polinomiais são funções polinomiais. Considere a função polinomial  $p$  tal que

$$p(x) = (x - \alpha) (x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1}) = x^n - \alpha^n.$$

Nesse caso, dizemos que  $p(x)$  é divisível por  $x - \alpha$ .

## Proposição 17

Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  é raiz da função polinomial  $p(x)$  de grau  $n$ , então existe uma função polinomial  $q(x)$ , de grau  $n - 1$ , tal que

$$p(x) = (x - \alpha) q(x).$$

Além disso,  $p(x)$  não pode ter mais do que  $n$  raízes.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

21 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Proposição 17

Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  é raiz da função polinomial  $p(x)$  de grau  $n$ , então existe uma função polinomial  $q(x)$ , de grau  $n - 1$ , tal que

$$p(x) = (x - \alpha) q(x).$$

Além disso,  $p(x)$  não pode ter mais do que  $n$  raízes.

Uma função polinomial  $p$  chama-se identicamente nula quando se tem  $p(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Nesse caso,  $p$  tem uma infinidade de raízes, já que todo número real é raiz de  $p$ . Esse caso não contradiz a proposição anterior, já que o grau de uma função polinomial não está definido para a função identicamente nula.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

21 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Teorema 18

*Seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  uma função polinomial de grau  $n$  e coeficientes inteiros. Se  $\frac{p}{q}$  é uma fração irredutível e raiz de  $p(x)$ , então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .*

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

22 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Teorema 18

*Seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  uma função polinomial de grau  $n$  e coeficientes inteiros. Se  $\frac{p}{q}$  é uma fração irredutível e raiz de  $p(x)$ , então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .*

Este Teorema nos permite encontrar facilmente as raízes racionais de um polinômio, caso exista alguma. Basta listar os divisores  $p$  de  $a_0$ , os divisores  $q$  de  $a_n$  e testar se  $p \left( \frac{p}{q} \right) = 0$  para todas as possíveis frações  $\frac{p}{q}$ . Caso haja alguma raiz racional de  $p(x)$ , ela estará entre as frações obtidas.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

22 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 19

Encontre todas as raízes do polinômio

$$p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

23 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



## Proposição 20 (Fórmula de Interpolação de Lagrange)

Dados  $n + 1$  números reais distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e fixados arbitrariamente os valores  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , existe um, e somente um, polinômio  $p$  de grau menor ou igual a  $n$  tal que

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \dots, \quad p(x_n) = y_n.$$

$p(x)$  pode ser obtido pela fórmula:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \left[ y_i \cdot \prod_{k \neq i} \left( \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \right].$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

24 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Quando se deseja traçar o gráfico, ao menos um esboço, de uma função polinomial, certas informações são de grande utilidade. Listaremos algumas delas.

Seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , com  $a_n \neq 0$ .

- ▶ Se  $n$  é par, então para  $|x|$  suficientemente grande,  $p(x)$  tem o mesmo sinal de  $a_n$ ;
- ▶ Se  $n$  é ímpar, então  $p(x)$  tem o mesmo sinal de  $a_n$  para valores positivos muito grandes de  $x$  e tem o sinal oposto de  $a_n$  para valores negativos muito grandes, em módulo, de  $x$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

25 Funções Polinomiais

Atividade Online

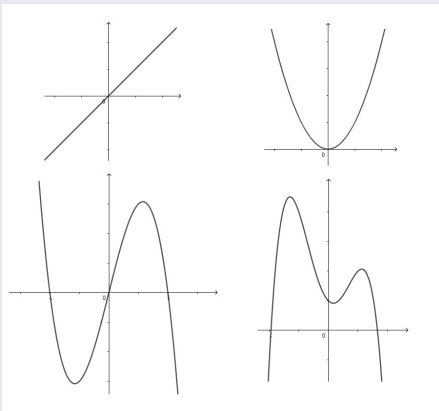
Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 21

Identifique se  $n$  é par ou ímpar e qual o sinal de  $a_n$  para cada um dos gráficos de funções polinomiais

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  abaixo:



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

26 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Sejam  $p$  e  $q$  dois polinômios.

- ▶ Se o grau de  $p$  é maior do que o grau de  $q$ , então para todo  $x$  com valor absoluto suficientemente grande, tem-se  $|p(x)| > |q(x)|$ ;

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

27 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Sejam  $p$  e  $q$  dois polinômios.

- ▶ Se o grau de  $p$  é maior do que o grau de  $q$ , então para todo  $x$  com valor absoluto suficientemente grande, tem-se  $|p(x)| > |q(x)|$ ;
- ▶ Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Se  $p(x_1) < 0$  e  $p(x_2) > 0$ , então,  $p$  deve possuir uma raiz entre  $x_1$  e  $x_2$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

27 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 22

Considere os polinômios  $p(x) = x^7$  e  $q(x) = x^3$ . Quando  $0 < |x| < 1$ , temos que  $|p(x)| < |q(x)|$ . Porém, quando  $|x| > 1$ , temos que  $|p(x)| > |q(x)|$ . Além disso, em ambos os casos,  $p(-1) = q(-1) = -1 < 0$  e  $p(1) = q(1) = 1 > 0$ . Assim, os polinômios possuem, cada um, ao menos uma raiz no intervalo  $(-1, 1)$  – a saber,  $x = 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

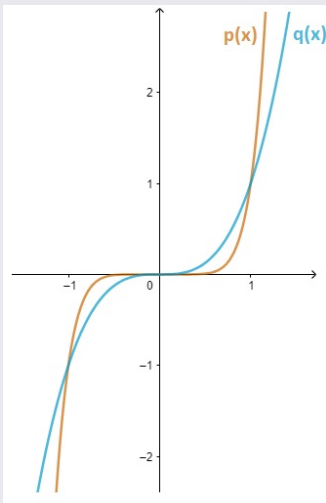
28 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 22 (Continuação)



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

29 Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 55 - Zeros de Polinômios (Forma Fatorada)  
Atividade 56 - Zeros de Polinômios (com Fatoração)

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

30 Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



1. Mostre que uma função afim  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fica inteiramente determinada quando conhecemos  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  para  $x_1 \neq x_2$ . Em outras palavras, calcule  $a, b \in \mathbb{R}$  onde  $f(x) = ax + b$ .
2. Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 seg na escada quando sobre 5 degraus e 20 seg quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo gasto no percurso?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

31 Exercícios

Bibliografia

3. Uma aplicação financeira rende a *juros simples* quando os juros são calculados somente sobre a aplicação inicial durante todo o período de tempo.

Edson faz uma aplicação que rende juros  $j > 0$  em um mês. Ou seja, se ele investiu um capital inicial  $c_0$ , então ao fim de 1 mês, Edson poderia resgatar  $c = c_0(1 + j)$ . Caso a aplicação renda juros simples, defina uma função afim que calcule o capital  $c_s$  em função do tempo  $t$  (em meses) da aplicação.

4. Edson investiu R\$500,00 em um banco a uma taxa de juros de 9% ao ano. Edson tem a pretensão de retirar seu dinheiro do banco quando o montante, ou seja, o dinheiro investido mais o rendimento, chegar a R\$1.000,00.

Se os juros que o banco ofereceu forem juros simples, defina a função afim que modela o montante e use-a para responder quanto tempo Edson vai esperar para retirar seu dinheiro.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

32 Exercícios

Bibliografia

5. Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-na na forma  $f(x) = a(x - m)^2 + k$ . A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo e máximo.

a)  $f(x) = x^2 - 8x + 23$ ;

b)  $f(x) = 8x - 2x^2$ ;

c)  $f(x) = 2x^2 - 16x + 46$ .

6. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2 - 7x + 12$ .

a) Calcule as raízes de  $f$  e qual  $x_0 \in \mathbb{R}$  é mínimo absoluto de  $f$ ;

b) Mostre que  $f$  é monótona (crescente ou decrescente) no intervalo  $(-\infty, x_0] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq x_0\}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

33 Exercícios

Bibliografia

# Exercícios

7. Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  em cada um dos intervalos abaixo:

- $[1, 4]$ ;
- $[6, 10]$ .

*Dica:* Esboce o gráfico de  $f$  nos intervalos indicados para visualizar melhor os valores mínimo e máximo assumidos pela função.

8. Considere  $f : [3; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2 - 7x + 10$ .

- Defina uma função bijetiva  $f'$  tal que  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x$  pertencente ao domínio de  $f'$ ;
- Prove que  $f'$ , definida por você, é bijetiva.

9. Considere  $f : [-5; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ .

- Faça um esboço do gráfico da função  $f$  e aponte os extremos absolutos da função;
- Defina uma função bijetiva  $f'$  onde  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x$  pertencente ao intervalo que será o domínio de  $f'$  e que preserve os extremos de  $f$ ;
- Prove que  $f'$  é monótona.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

34 Exercícios

Bibliografia

10. Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar 405 reais, custo de uma excursão. Todos contribuíram igualmente. Na última hora, dois alunos desistiram. Com isso, a parte de cada um sofreu um aumento de um real e vinte centavos. Quantos alunos tem a turma?

11. Considere a função polinomial  $p(x) = x^2 - 2$ .

- Usando o Teorema de raízes racionais prove que  $p(x)$  não possui raízes racionais;
- Mostre que  $\sqrt{2}$  é raiz de  $p(x)$ ;
- Conclua que  $\sqrt{2}$  é irracional.

12. Considere a função polinomial  $p(x) = x^2 - q$ , onde  $q \in \mathbb{N}^*$  é um número primo.

- Usando o Teorema de raízes racionais prove que  $p(x)$  não possui raízes racionais;
- Mostre que  $\sqrt{q}$  é raiz de  $p(x)$ ;
- Conclua que  $\sqrt{q}$  é irracional.

**13.** Considere a função polinomial  $p(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x$ . Utilize o Teorema das Raízes Racionais pelo menos uma vez para encontrar todas as raízes reais de  $p(x)$ .

*Dica:* Antes de aplicar o Teorema das Raízes Racionais, identifique uma das raízes de  $p(x)$  e fatore  $p(x)$  para então usar o Teorema.

Porque é preciso usar a dica ao invés de aplicar o Teorema diretamente em  $p(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x$ ?

**14.** Determine o polinômio  $p(x)$  de menor grau possível tal que  $p(1) = 2$ ,  $p(2) = 1$ ,  $p(3) = 4$  e  $p(4) = 3$ .

**15.** Mostre que, se  $n$  é um número par, então o polinômio  $p(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$  não possui raiz real.

*Dica:* Note que, para  $x \neq 1$ ,  $p(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ . Proceda supondo, por contradição, que existe  $a \neq 1$  raiz de  $p(x)$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

36 Exercícios

Bibliografia

- [1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.  
*A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.*  
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Exercícios

37

Bibliografia