Capítulo 4 - Parte 1

Matemática Elementar
Funções Reais e Gráficos

6 de novembro de 2023

Igor Oliveira
matematicaelementar@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Introdução
Definição de Função
Atividade Online
Funções Compostas
Atividade Online
Função Inversa
Atividade Online
Injetividade e Sobrejetividade
Atividade Online
Fórmulas e Funções
Atividade Online
Exercícios
Bibliografia

Considere as funções

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra?

Apresentação da Aula

Considere as funções

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra?
Elas são bijetivas?

Apresentação da Aula

Considere as funções

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra?
Elas são bijetivas?
Quais outras informações podemos dizer acerca dessas funções?

O que É uma Função?

Definição 1

Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer.
Uma função é uma relação $f : X \to Y$ que, a cada elemento $x \in X$, associa um e somente um elemento $y \in Y$.
Nesse caso:

(i) Os conjuntos X e Y são chamados domínio e contradomínio de f, respectivamente;

(ii) O conjunto

$$f(X) = \{y \in Y \,;\ \text{existe } x \in X \text{ onde } f(x) = y\} \subseteq Y$$

é chamado imagem de f;

(iii) Dado $x \in X$, o (único) elemento $y = f(x) \in Y$ correspondente é chamado imagem de x.

O que É uma Função?

Dessa forma, uma função é um terno constituído por: domínio, contradomínio e lei de associação (dos elementos do domínio com os do contradomínio). Precisamos desses três elementos para que uma função seja bem definida. Poderíamos definir função da seguinte forma:

Para que uma relação $f : X \to Y$ seja uma função, ela deve satisfazer a duas condições fundamentais:

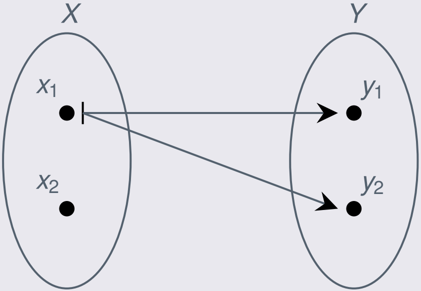
(I) Estar bem definida em todo elemento do domínio (existência);

(II) Não fazer corresponder mais de um elemento do contradomínio a cada elemento do domínio (unicidade).

O que É uma Função?

Exemplo 2

Sejam $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ e a relação $f : X \to Y$ definida por:



Qual(is) o(s) problema(s) com essa “função”?

Definição 3

Uma função $f : X \to Y$ é chamada de função real se seus valores são números reais; isto é, $Y \subseteq \mathbb{R}$. Quando a variável independente assume valores reais – isto é, $X \subseteq \mathbb{R}$ –, diz-se que f é uma função de variável real. Nesse caso, pode-se utilizar a notação $f : D \subseteq \mathbb{R} \to Y$ para enfatizar que o domínio D da função é subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definição 3

Uma função $f : X \to Y$ é chamada de função real se seus valores são números reais; isto é, $Y \subseteq \mathbb{R}$. Quando a variável independente assume valores reais – isto é, $X \subseteq \mathbb{R}$ –, diz-se que f é uma função de variável real. Nesse caso, pode-se utilizar a notação $f : D \subseteq \mathbb{R} \to Y$ para enfatizar que o domínio D da função é subconjunto de $\mathbb{R}$.

A menos que se diga o contrário, trabalharemos, a partir desse momento, com funções reais de variável real, e, por simplicidade, chamaremos essas funções simplesmente de funções reais.

Exemplo 4

Considere as funções reais

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de p e q?

O que É uma Função?

Exemplo 4

Considere as funções reais

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de p e q?

Exemplo 5

Seja $\mathcal{I}_X : X \to X$ uma função tal que $\mathcal{I}_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Chamamos $\mathcal{I}_X$ de função identidade do conjunto X.

Atividade Online

Atividade 30 - Como Reconhecer Funções a Partir de Tabelas
Atividade 31 - Problemas de Domínio de Funções

Composição de Funções

Definição 6

Sejam $f : X \to Y$ e $g : U \to V$ duas funções, com $Y \subseteq U$. A função composta de g com f é a função denotada por $g \circ f$, com domínio em X e contradomínio em V, que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder o elemento $v = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in V$. Isto é:

$$\begin{array}{rcccccc} g \circ f : & X & \to & Y \subseteq U & \to & V \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Exemplo 7

Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que $f \circ \mathcal{I}_X = f$ e $\mathcal{I}_Y \circ f = f$.

Composição de Funções

Exemplo 7

Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que $f \circ \mathcal{I}_X = f$ e $\mathcal{I}_Y \circ f = f$.

Exemplo 8

Qual função resulta da composição $p \circ q$?

Proposição 9 (Associatividade da composição de funções)

Considere $f : X \to Y$, $g : U \to V$ e $h : A \to B$ funções, com $B \subseteq U$ e $V \subseteq X$. Vale a seguinte igualdade:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Atividade Online

Atividade 32 - Encontre Funções Compostas

Atividade 33 - Modele com Funções Compostas

Definição 10

Uma função $f : X \to Y$ é invertível se existe uma função $g : Y \to X$ tal que

(i) $f \circ g = \mathcal{I}_Y$;

(ii) $g \circ f = \mathcal{I}_X$.

Nesse caso, a função g é dita função inversa de f e denotada por $g = f^{-1}$.

Exemplo 11

A função q é inversa de p?

Exemplo 11

A função q é inversa de p?

Esse exemplo ilustra a importância de verificarmos as duas condições para que tenhamos uma função inversa.

Atividade Online

Atividade 34 - Verifique Funções Inversas

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Definição 12

Considere uma função $f : X \to Y$.

(i) f é sobrejetiva se, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;

(ii) f é injetiva se $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;

(iii) f é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Definição 12

Considere uma função $f : X \to Y$.

(i) f é sobrejetiva se, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;

(ii) f é injetiva se $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;

(iii) f é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Há, ainda, formas alternativas de enunciar as definições acima:

- f é sobrejetiva se, e somente se, $f(X) = Y$;
- f é injetiva se, e somente se, $x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$;
- f é injetiva se, e somente se, para todo $y \in f(X)$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- f é bijetiva se, e somente se, para todo $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Exemplo 13

As funções p e q são sobrejetivas, injetivas ou bijetivas?

Teorema 14

Uma função $f : X \to Y$ é invertível se, e somente se, é bijetiva.

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Teorema 14

Uma função $f : X \to Y$ é invertível se, e somente se, é bijetiva.

Exemplo 15

Decorre do Teorema 14 e do Exemplo 13 que as funções p e q não são invertíveis.

Teorema 16

Considere a função $f : X \to Y$. *Então existe um subconjunto* $Y' \subseteq Y$, *tal que* $f' : X \to Y'$, *definida por* $f'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in X$, *é sobrejetiva.*

Teorema 16

Considere a função $f : X \to Y$*. Então existe um subconjunto* $Y' \subseteq Y$*, tal que* $f' : X \to Y'$*, definida por* $f'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in X$*, é sobrejetiva.*

Teorema 17

Considere a função $f : X \to Y$*. Então existe um subconjunto* $X' \subseteq X$*, tal que* $f' : X' \to Y$*, definida por* $f'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in X'$*, é injetiva.*

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Teorema 16

Considere a função $f : X \to Y$. Então existe um subconjunto $Y' \subseteq Y$, tal que $f' : X \to Y'$, definida por $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, é sobrejetiva.

Teorema 17

Considere a função $f : X \to Y$. Então existe um subconjunto $X' \subseteq X$, tal que $f' : X' \to Y$, definida por $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X'$, é injetiva.

Exemplo 18

Restrinja o domínio ou o contradomínio de p e q a fim de obter funções bijetivas com as mesmas leis de formação.

Atividade Online

Atividade 35 - Determine se uma Função É Inversível
Atividade 36 - Restrinja os Domínios de Funções para Torná-las Inversíveis

É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula. Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Essas funções são iguais?

Fórmulas e Funções

É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula. Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Essas funções são iguais?
NÃO! Note que p_2 é bijetiva e p_1 não é, mesmo tendo a mesma fórmula.
Além disso, funções podem ser definidas por mais de uma fórmula, como na função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Atividade 38 - Cálculo de Funções Definidas por Partes

Exercícios

1. Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função

a) Que a cada ponto do plano cartesiano associa a distância desse ponto à origem do plano;
b) Que a cada dois números naturais associa seu mdc;
c) Que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;
d) Que a cada figura plana fechada e limitada associa a sua área;
e) Que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ associa seu complementar;
f) Que a cada subconjunto finito de $\mathbb{N}$ associa seu número de elementos;
g) Que a cada subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ associa seu menor elemento.

2. Considere a função $g : [0; 5] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & \text{se } \ x < 3 \\ x - 2 & \text{se } \ x \geq 3 \end{cases}.$$

Determine as soluções de:

a) $g(x) = -1$;

b) $g(x) = 0$;

c) $g(x) = 3$;

d) $g(x) = 4$;

e) $g(x) < 3$;

f) $g(x) \geq 3$.

3. Considere a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{-n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\[2ex] \dfrac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Mostre que f é bijetiva.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*_+$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas.

a) f é injetiva?

b) f é sobrejetiva?

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função cuja lei de associação é dada abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{3}{2}x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Mostre que f é bijetiva.

6. Considere a função $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - 2, & \text{se } x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2 - \dfrac{1}{1-x}, & \text{se } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Mostre que f é bijetiva.

7. Considere $f : [3,5; +\infty) \to [-2,25; +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Prove que f é bijetiva.

8. Considere as funções f, g e h definidas por: $f : (-\infty, 0] \to [-4, +\infty)$, tal que $f(x) = -x - 4$; $g : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \sqrt{-x}$; e $h : \mathbb{R} \to [-4, +\infty)$, tal que $h(x) = x^2 - 4$. Quais dessas funções é sobrejetiva e quais não são? Alguma dessas funções é resultante da composição das outras?

9. Considere as funções reais $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Demonstre, ou refute com um contraexemplo, as afirmações abaixo:

a) Se f e g são injetivas, então $(g \circ f)$ é injetiva;

b) Se $(g \circ f)$ é injetiva então f e g são injetivas;

c) Se f e g são sobrejetivas, então $(g \circ f)$ é sobrejetiva;

d) Se $(g \circ f)$ é sobrejetiva então f e g são sobrejetivas.

10. Faça uso de pelo menos um dos resultados anteriores para mostrar a injetividade das funções $f : [1, +\infty) \to (-\infty, 0]$, tal que $f(x) = -x + 1$; $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2 - 2x - 3$; e $h : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x^2 - 4$.

Bibliografia

[1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.