

Capítulo 3

Matemática Elementar Matrizes e Sistemas Lineares

20 de outubro de 2023

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metr pole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Apresentação
Matrizes
Atividade Online
Operações com Matrizes
Atividade Online
Sistemas Lineares
Atividade Online
Operações Elementares
Atividade Online
Matrizes Quadradas
Atividade Online
Determinante
Atividade Online
Determinante
Exercícios
Bibliografia

Matemática Elementar
Igor Oliveira

Apresentação
Matrizes
Atividade Online
Operações com
Matrizes
Atividade Online
Sistemas Lineares
Atividade Online
Operações
Elementares
Atividade Online
Matrizes Quadradas
Atividade Online
Determinante
Atividade Online
Determinante
Exercícios
Bibliografia

Motivação

Matrizes são, fundamentalmente, tabelas numéricas sobre as quais se definem certas operações algébricas, útil para armazenar vários dados em um só elemento. Além disso, as matrizes se aplicam ao estudo dos sistemas lineares (conforme veremos neste capítulo), bem como desempenham um papel decisivo no estudo das transformações lineares, as quais são justamente as funções estudadas na Álgebra Linear.

Definição 1

Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$. Uma matriz (real) do tipo $m \times n$ (lê-se: m por n) é uma “tabela” disposta em m linhas e n colunas.

Denotamos os números reais que formam a i -ésima linha de uma matriz A por $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ e sua j -ésima coluna por $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$. Assim, escrevemos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Chamamos de entradas, de uma matriz A , os reais a_{ij} que a compõem. Poderemos indicar uma matriz A do tipo $m \times n$ com entradas a_{ij} por

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

ou, simplesmente, $A = (a_{ij})$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

4 Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 2

As matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = i + j$ e $B = (b_{ij})_{2 \times 4}$, em que $b_{ij} = i^j$, são:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Definição 3

Uma matriz A do tipo $n \times n$, é dita quadrada de ordem n . O conjunto formado por suas entradas a_{ij} é chamado de diagonal de A . O conjunto formado pelas entradas a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ é chamado de diagonal secundária de A .

Uma matriz do tipo $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero chama-se nula e será denotada por $0_{m \times n}$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

6

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 3

Uma matriz A do tipo $n \times n$, é dita quadrada de ordem n . O conjunto formado por suas entradas a_{ij} é chamado de diagonal de A . O conjunto formado pelas entradas a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ é chamado de diagonal secundária de A . Uma matriz do tipo $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero chama-se nula e será denotada por $0_{m \times n}$.

Exemplo 4

Dada a matriz A quadrada de ordem 3 abaixo, sua diagonal é formada pelos números 2, 4 e 1. A diagonal secundária é formada por 1, 4 e 4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

6

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Atividade Online 17 - Use Matrizes para Representar Dados

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

7 Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 5 (Produto por escalar e adição de matrizes)

Dadas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o produto por escalar λA e a adição $A + B$ por:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

8 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 6

Calcule:

$$A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}.$$

Proposição 7 (Propriedades do produto por escalar e da adição)

Sejam A , B e C matrizes de mesmo tipo $m \times n$, e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Tem-se:

- i. Comutatividade da adição: $A + B = B + A$;
- ii. Associatividade da adição: $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- iii. Elemento neutro da adição: $A + 0_{m \times n} = A$;
- iv. Existência do oposto aditivo: $A + (-A) = 0_{m \times n}$;
- v. Associatividade da multiplicação por escalar:
 $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
- vi. Elemento neutro da multiplicação por escalar: $1 \cdot A = A$;
- vii. Distributividade, de uma em relação à outra:
 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ e $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

10 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 8 (Multiplicação de matrizes)

Dadas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, onde o número de colunas de A coincide com o número de linhas de B . Definimos o produto AB como a matriz $P = (p_{ij})_{m \times p}$, cujas entradas são:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

11 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 8 (Multiplicação de matrizes)

Dadas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, onde o número de colunas de A coincide com o número de linhas de B . Definimos o produto AB como a matriz $P = (p_{ij})_{m \times p}$, cujas entradas são:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

Exemplo 9

Calcule:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

11 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Proposição 10 (Propriedades do produto de matrizes)

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$, $C = (c_{ij})_{p \times q}$, $D = (d_{ij})_{n \times p}$ e $E = (e_{ij})_{m \times n}$. Tem-se:

- i. Associatividade: $A(BC) = (AB)C$;
- ii. Distributividade à esquerda, em relação a soma:
 $A(B + D) = AB + AD$;
- iii. Distributividade à direita, em relação a soma:
 $(A + E)B = AB + EB$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

12 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Observação 11

Dadas duas matrizes A e B quadradas e de mesma ordem, os dois produtos AB e BA estão bem definidos. No entanto, de modo geral, eles **NÃO SÃO IGUAIS**, isto é, **O PRODUTO DE MATRIZES QUADRADAS DE MESMA ORDEM NÃO É COMUTATIVO**. Quando, excepcionalmente, ocorre a igualdade $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

13 Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Observação 11

Dadas duas matrizes A e B quadradas e de mesma ordem, os dois produtos AB e BA estão bem definidos. No entanto, de modo geral, eles **NÃO SÃO IGUAIS**, isto é, O PRODUTO DE MATRIZES QUADRADAS DE MESMA ORDEM NÃO É COMUTATIVO. Quando, excepcionalmente, ocorre a igualdade $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

Exemplo 12

Comprove a observação anterior comparando o produto das matrizes quadradas do Exemplo 9 com o produto abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

13 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Atividade Online 18 - Multiplicação de Matrizes por
Números Escalares

Atividade Online 19 - Some e Subtraia Matrizes

Atividade Online 20 - Use Matrizes para Manipular Dados

Atividade Online 21 - Multiplique Matrizes

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

14 Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Sistemas Lineares e Matrizes

Um sistema de m equações lineares nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n pode ser representado pelas equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ (\dots) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

Tal sistema é equivalente à equação matricial $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

Nesse caso, dizemos que A é a matriz do sistema. Quando $B = 0_{m \times 1}$, o sistema é dito homogêneo. Observe que todo sistema homogêneo admite a solução $X = 0_{n \times 1}$, dita trivial.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

15 Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 13 (Sistemas lineares equivalentes)

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

16 Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 13 (Sistemas lineares equivalentes)

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução.

Definição 14 (Matriz aumentada de um sistema linear)

Dado um sistema linear $AX = B$, define-se a sua matriz aumentada $(A|B)$, como sendo a matriz obtida “posicionando” a matriz B à direita da matriz A , isto é,

$$(A|B) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

16 Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 15

Qual a matriz aumentada do sistema linear abaixo?

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

17 Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Atividade Online 22 - Represente Sistemas Lineares com Matrizes

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

18 Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Operações Elementares sobre Matrizes

Algumas operações sobre as linhas de uma matriz são ditas elementares. São elas:

- ▶ $(l_i \leftrightarrow l_j)$: Troca de posição entre duas linhas l_i e l_j ;
- ▶ $(l_i \rightarrow \lambda l_i)$: Multiplicação de uma linha l_i por um escalar $\lambda \neq 0$;
- ▶ $(l_j \rightarrow l_j + \lambda l_i)$: Substituição de uma linha l_j por $l_j + \lambda l_i$, sendo $\lambda \neq 0$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

19 Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Operações Elementares sobre Matrizes

Algumas operações sobre as linhas de uma matriz são ditas elementares. São elas:

- ▶ $(l_i \leftrightarrow l_j)$: Troca de posição entre duas linhas l_i e l_j ;
- ▶ $(l_i \rightarrow \lambda l_i)$: Multiplicação de uma linha l_i por um escalar $\lambda \neq 0$;
- ▶ $(l_j \rightarrow l_j + \lambda l_i)$: Substituição de uma linha l_j por $l_j + \lambda l_i$, sendo $\lambda \neq 0$.

Definição 16 (Equivalência por linhas)

Diz-se que uma matriz B é linha equivalente a uma matriz A quando B é obtida de A efetuando-se nesta uma sequência de operações elementares.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

19 Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Operações Elementares sobre Matrizes

Algumas operações sobre as linhas de uma matriz são ditas elementares. São elas:

- ▶ $(l_i \leftrightarrow l_j)$: Troca de posição entre duas linhas l_i e l_j ;
- ▶ $(l_i \rightarrow \lambda l_i)$: Multiplicação de uma linha l_i por um escalar $\lambda \neq 0$;
- ▶ $(l_j \rightarrow l_j + \lambda l_i)$: Substituição de uma linha l_j por $l_j + \lambda l_i$, sendo $\lambda \neq 0$.

Definição 16 (Equivalência por linhas)

Diz-se que uma matriz B é linha equivalente a uma matriz A quando B é obtida de A efetuando-se nesta uma sequência de operações elementares.

Proposição 17

Dois sistemas lineares $AX = B$ e $A'X = B'$ são equivalentes se suas matrizes aumentadas $(A|B)$ e $(A'|B')$ são linha equivalentes.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

19 Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 18 (Matriz escalonada)

Diz-se que uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é escalonada quando cumpre as seguintes condições:

- ▶ O primeiro elemento não-nulo de uma linha está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha subsequente;
- ▶ As linhas nulas, caso existam, estão abaixo das demais.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

20 Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 18 (Matriz escalonada)

Diz-se que uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é escalonada quando cumpre as seguintes condições:

- ▶ O primeiro elemento não-nulo de uma linha está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha subsequente;
- ▶ As linhas nulas, caso existam, estão abaixo das demais.

Para resolvermos um sistema linear, fazemos o escalonamento da matriz aumentada do sistema a fim de obtermos uma matriz escalonada que seja linha equivalente à matriz aumentada do sistema. Esse procedimento é chamado de Método de Gauss ou Eliminação Gaussiana.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

20 Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 19

Encontre o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 4 \end{cases} .$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

21 Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Operações Elementares sobre Matrizes

Exemplo 19

Encontre o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 4 \end{cases} .$$

Exemplo 20

Encontre o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 4t = 9 \\ x + y - z + 2t = 7 \\ -x + 2y + z - t = 3 \\ 4y - z + 3t = 13 \end{cases} .$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

21 Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Atividade Online 23 - Operações sobre Linhas de uma Matriz

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

22 Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Tipos de Matrizes Quadradas

Definição 21 (Matrizes triangulares e diagonais)

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é dita triangular, quando ocorre uma das possibilidades:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad \text{ou} \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i < j.$$

No primeiro caso, ela é dita triangular superior e, no segundo, triangular inferior. Uma matriz que é triangular superior e inferior é dita diagonal.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

23 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Tipos de Matrizes Quadradas

Definição 21 (Matrizes triangulares e diagonais)

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é dita triangular, quando ocorre uma das possibilidades:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad \text{ou} \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i < j.$$

No primeiro caso, ela é dita triangular superior e, no segundo, triangular inferior. Uma matriz que é triangular superior e inferior é dita diagonal.

Exemplo 22

As matrizes A , B e C abaixo são, respectivamente, triangular superior, inferior e diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

23 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 23 (Matriz Identidade)

Uma matriz diagonal $n \times n$ cujas entradas não obrigatoriamente nulas são todas iguais a 1 é chamada de matriz identidade de ordem n , a qual denota-se por I_n ou, simplesmente, por I .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

24 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 23 (Matriz Identidade)

Uma matriz diagonal $n \times n$ cujas entradas não obrigatoriamente nulas são todas iguais a 1 é chamada de matriz identidade de ordem n , a qual denota-se por I_n ou, simplesmente, por I .

A matriz identidade de ordem n é o elemento neutro da multiplicação de matrizes quadradas, pois, para toda matriz quadrada A de ordem n , vale a igualdade:

$$AI = IA = A.$$

Além disso, dada uma matriz $B_{n \times m}$, vale também:

$$BI_m = I_n B = B.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

24 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Tipos de Matrizes Quadradas

Definição 24 (Matrizes invertíveis)

Diz-se que uma matriz quadrada A é invertível, quando existe uma matriz quadrada B , de mesma ordem que A , tal que

$$AB = BA = I.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

25 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 24 (Matrizes invertíveis)

Diz-se que uma matriz quadrada A é invertível, quando existe uma matriz quadrada B , de mesma ordem que A , tal que

$$AB = BA = I.$$

Prova-se que A , quando invertível, possui uma única matriz inversa. Tal matriz é dita a inversa de A , e denotada por A^{-1} .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

25 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 24 (Matrizes invertíveis)

Diz-se que uma matriz quadrada A é invertível, quando existe uma matriz quadrada B , de mesma ordem que A , tal que

$$AB = BA = I.$$

Prova-se que A , quando invertível, possui uma única matriz inversa. Tal matriz é dita a inversa de A , e denotada por A^{-1} .

Exemplo 25

Verifique que as matrizes abaixo são invertíveis multiplicando-as.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

25 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Tipos de Matrizes Quadradas

Para calcular a inversa de uma matriz A , escalona-se a matriz aumentada $(A|I)$ a fim de se obter uma matriz equivalente por linhas do tipo $(I|B)$. Se for possível tal procedimento, então $B = A^{-1}$. Caso contrário, A não é invertível.

Exemplo 26

Calcule a inversa das matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

26 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Tipos de Matrizes Quadradas

Para calcular a inversa de uma matriz A , escalona-se a matriz aumentada $(A|I)$ a fim de se obter uma matriz equivalente por linhas do tipo $(I|B)$. Se for possível tal procedimento, então $B = A^{-1}$. Caso contrário, A não é invertível.

Exemplo 26

Calcule a inversa das matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 27

Qual a solução do sistema abaixo?

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y = 4 \end{cases}$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

26 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Atividade Online 24 - Determine as Matrizes Inversas
Atividade Online 25 - Encontre a Inversa de uma Matriz
2x2
Atividade Online 26 - Matriz Inversa de uma Matriz 3x3
Atividade Online 27 - Use Matrizes para Resolver
Sistemas de Equações

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

27 Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 28 (Determinante de matrizes 2×2 e 3×3)

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, definimos o determinante de A e B , denotados, respectivamente, por $\det A$ e $\det B$ como sendo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

e

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \\ &= (b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32}) \\ &\quad - (b_{13}b_{22}b_{31} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33}). \end{aligned}$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

28 Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 29

Calcule o determinante das matrizes A e B do Exemplo 26, ou seja,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

29 Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Atividade Online 28 - Determinante de uma Matriz 2×2
Atividade Online 29 - Determinante de uma Matriz 3×3

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

30 Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Determinante de Matrizes de Ordem n

Antes de apresentar uma definição para o determinante de uma matriz quadrada qualquer, vejamos alguns resultados mais simples sobre o determinante.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

31 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Determinante de Matrizes de Ordem n

Antes de apresentar uma definição para o determinante de uma matriz quadrada qualquer, vejamos alguns resultados mais simples sobre o determinante.

Proposição 30

Dada uma matriz $A_{n \times n}$, são equivalentes as afirmações abaixo:

- i) Para toda matriz $B_{n \times 1}$, o sistema linear $AX = B$ admite uma única solução;
- ii) A é invertível;
- iii) $\det A \neq 0$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

31 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Determinante de Matrizes de Ordem n

Antes de apresentar uma definição para o determinante de uma matriz quadrada qualquer, vejamos alguns resultados mais simples sobre o determinante.

Proposição 30

Dada uma matriz $A_{n \times n}$, são equivalentes as afirmações abaixo:

- i) Para toda matriz $B_{n \times 1}$, o sistema linear $AX = B$ admite uma única solução;
- ii) A é invertível;
- iii) $\det A \neq 0$.

Exemplo 31

Considere a matriz $C_{3 \times 1}$. O que a Proposição 30 pode te garantir acerca de um sistema linear $BX = C$ onde B é definida no Exemplo 26?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

31 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Proposição 32 (Propriedades)

Considere as matrizes $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$, são válidas as afirmações abaixo:

i) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

ii) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

32 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Proposição 32 (Propriedades)

Considere as matrizes $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$, são válidas as afirmações abaixo:

i) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

ii) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Exemplo 33

Qual o determinante das matrizes C e D abaixo?

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

32 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Proposição 34 (Determinante e Operações Elementares)

Seja $A_{n \times n}$ uma matriz.

- i) Se B é a matriz que resulta quando duas linhas de A são permutadas, então $\det A = -\det B$;
- ii) Se B é a matriz que resulta quando uma única linha de A é multiplicada por um escalar $\lambda \neq 0$, então $\det A = \frac{1}{\lambda} \det B$;
- iii) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo não-nulo de uma linha de A é somado a uma outra linha de A , então $\det A = \det B$.

O resultado é análogo quando as operações elementares são feitas sobre as colunas de A .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

33 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 35 (Permutação)

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, uma permutação do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ é um rearranjo dos elementos desse conjunto em alguma ordem, sem omissão ou repetição.

Dizemos que uma permutação σ é par quando o rearranjo pode ser obtido por um número par de trocas de elementos a partir da ordem crescente. Caso contrário, a permutação é dita ímpar.

Definimos o sinal da permutação σ , denotado por $\text{sgn } \sigma$, como sendo igual a 1 se σ for par e igual a -1 se σ for ímpar.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

34 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 35 (Permutação)

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, uma permutação do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ é um rearranjo dos elementos desse conjunto em alguma ordem, sem omissão ou repetição.

Dizemos que uma permutação σ é par quando o rearranjo pode ser obtido por um número par de trocas de elementos a partir da ordem crescente. Caso contrário, a permutação é dita ímpar.

Definimos o sinal da permutação σ , denotado por $\text{sgn } \sigma$, como sendo igual a 1 se σ for par e igual a -1 se σ for ímpar.

Exemplo 36

$\sigma_1 = (3, 1, 2)$ e $\sigma_2 = (1, 3, 2)$ são permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$. Qual o sinal de σ_1 e σ_2 ?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

34 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 37 (Produto Elementar)

Dado uma matriz $A_{n \times n}$ e $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$. Dizemos que

$$a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

é um produto elementar de A . Em outras palavras, é o produto de n entradas de A sem que haja mais de uma entrada de alguma linha ou coluna. Dizemos também que

$$\text{sgn } \sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

é um produto elementar com sinal de A .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

35 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 37 (Produto Elementar)

Dado uma matriz $A_{n \times n}$ e $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$. Dizemos que

$$a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

é um produto elementar de A . Em outras palavras, é o produto de n entradas de A sem que haja mais de uma entrada de alguma linha ou coluna. Dizemos também que

$$\text{sgn } \sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

é um produto elementar com sinal de A .

Definição 38 (Determinante)

Seja $A_{n \times n}$. O determinante de A é o somatório de todos os seus produtos elementares com sinal.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

35 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Determinante de Matrizes de Ordem n

Proposição 39 (Determinante de matrizes triangulares)

Seja $A_{n \times n}$ uma matriz triangular. Então

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

38 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Determinante de Matrizes de Ordem n

Proposição 39 (Determinante de matrizes triangulares)

Seja $A_{n \times n}$ uma matriz triangular. Então

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Exemplo 40

Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & -6 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

38 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 41 (Matriz menor e cofator)

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, definimos a matriz menor ij de A , denotada por A_{ij} , como sendo a matriz obtida a partir de A excluindo-se a linha i e a coluna j . Definimos também o cofator de a_{ij} , como sendo

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

37 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Definição 41 (Matriz menor e cofator)

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, definimos a matriz menor ij de A , denotada por A_{ij} , como sendo a matriz obtida a partir de A excluindo-se a linha i e a coluna j . Definimos também o cofator de a_{ij} , como sendo

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}.$$

Proposição 42 (Determinante a partir de cofatores)

Seja $A_{n \times n}$ uma matriz. Fixada uma linha i ou uma coluna j de A , teremos, respectivamente:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

ou

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

37 Determinante

Exercícios

Bibliografia

Determinante de Matrizes de Ordem n

Exemplo 43

Calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

38 Determinante

Exercícios

Bibliografia

1. Determine, caso exista, a matriz A , tal que $AB = C$, em que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Sejam A e B matrizes $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente. A afirmação abaixo é sempre válida?

Se $AB = 0_{m \times p}$, então $A = 0_{m \times n}$ ou $B = 0_{n \times p}$.

Exercícios

3. Encontre uma matriz $A_{2 \times 2}$, não-nula, tal que $AA = 0_{2 \times 2}$.

4. Determine as soluções dos seguintes sistemas lineares:

a)

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = -1 \end{cases};$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases};$$

c)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 3 \end{cases}.$$

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para quais matrizes $B_{4 \times 1}$, o sistema $AX = B$ tem solução?

6. Mostre que, se A e B são matrizes $n \times n$, ambas invertíveis, então AB é invertível e vale a igualdade $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n . Mostre, através de um contra-exemplo, que a seguinte igualdade não é sempre válida:

$$\det(A + B) = \det A + \det B.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

41 Exercícios

Bibliografia

Exercícios

8. Calcule a matriz inversa, se existir, e o determinante das matrizes abaixo:

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

b)

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix};$$

c)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

42 Exercícios

Bibliografia

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^{-1} , caso A seja invertível, e calcule as soluções do sistema linear $AX = B$, onde $B = 0_{3 \times 1}$.

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det A$ e para quais matrizes $B_{3 \times 1}$ o sistema $AX = B$ tem solução.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

43 Exercícios

Bibliografia

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -9 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det A$ e, caso A seja invertível, $\det A^{-1}$. Além disso, para quais matrizes $B_{5 \times 1}$ o sistema linear $AX = B$ possui alguma solução?

12. Considere as Matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule:

- $A \cdot B$;
- $\det(A \cdot B)$;
- $\det(A + B)$;
- A inversa da matriz $A + B$, caso exista;
- A solução do sistema $AX = C$, onde

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

45 Exercícios

Bibliografia

13. Através do uso das operações elementares, mostre que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

14. Prove a Proposição 39, ou seja, que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto das entradas de sua diagonal.

15. Seja A uma matriz $n \times n$ com mais de $n^2 - n$ entradas nulas. Mostre que $\det A = 0$.

16. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n linha equivalentes. Mostre que, se $\det A = 0$, então $\det B = 0$. No caso de $\det A \neq 0$, sob que condições teremos $\det A = \det B$?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

46 Exercícios

Bibliografia

- [1] LIMA, Ronaldo F.
Álgebra Linear Essencial.
Acesso em www.ronaldofreiredelima.com
- [2] BOLDRINI, José L. (et al).
Álgebra linear.
3. ed. São Paulo, SP: Harbra, 1986.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Atividade Online

Determinante

Exercícios